E.N.S.E.T. 1985

Section A_1 Math I

Durée : 4 heures

Questions préliminaires

A. Soit l une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue, périodique de période 1.

1° Montrer que :

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, l(t)\, dt = \int_0^1 l(t)\, dt.$$

2° Montrer que, si

$$\int_0^1 l(t)\, dt = 0,$$

alors

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \lambda \int_\alpha^\beta e^{-\lambda t}\, l(t)\, dt = 0,$$

la limite étant uniforme par rapport aux couples (α, β) vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant +\infty$.

F *désigne, dans la suite, une fonction continue de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$, *localement lipschitzienne en la seconde variable.*

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x' = F(t, x).$$

B. Montrer que, si φ et ψ sont deux solutions de (E) sur un intervalle ouvert I, et si a appartient à I :

$$\varphi(a) < \psi(a) \Rightarrow \forall\, t \in I \quad \varphi(t) < \psi(t).$$

On suppose, dans le reste du problème, que F *vérifie :*

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \quad F(t, 0) = F(t, 1) = 0.$$

I

1° Soit (s, x) dans $\mathbb{R} \times [0,1]$ et φ une solution de (E) définie sur un intervalle ouvert I contenant s et vérifiant $\varphi(s) = x$.

a. Montrer :

$$\forall\, t \in I \qquad \varphi(t) \in [0,1].$$

b. Montrer que, si $b = \sup I$ est fini, alors $\lim_{\substack{t \to b \\ t \in I}} \varphi(t)$ existe. En déduire qu'il existe alors un intervalle ouvert J contenant strictement I et une solution ψ de (E) définie sur J telle que :

$$\forall\, t \in I \qquad \varphi(t) = \psi(t).$$

2° Montrer que, pour tout couple (s, x) de $\mathbb{R} \times [0,1]$, il existe une unique solution φ de (E), *définie sur* $\mathbb{R}$, telle que $\varphi(s) = x$.

Dans toute la suite, on désignera cette solution φ *par* $t \to 0\,(s, x, t)$. 0 *est donc une fonction sur* $\mathbb{R} \times [0,1] \times \mathbb{R}$ *prenant ses valeurs dans* $[0,1]$.

3° *a.* Montrer que, pour t_0 fixé dans $\mathbb{R}$, l'application

$$\gamma_{t_0} : (s, x) \to 0\,(s, x, t_0)$$

de $\mathbb{R} \times [0,1]$ dans $[0,1]$ est continue.

(*Indication :* Pour un intervalle $]a, b[$ inclus dans $[0,1]$, on exprimera $\gamma_{t_0}^{-1}(]a, b[)$ à l'aide des solutions φ et ψ de (E) telles que $\varphi(t_0) = a$ et $\psi(t_0) = b$.)

b. En déduire que 0 est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1] \times \mathbb{R}$.

On adopte, dans la suite, les notations suivantes :

$\mathcal{C}_p$: Ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R} \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}$, périodiques de période 1 par rapport à la première variable.

$\mathcal{S}$: Ensemble des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[0,1]$.

$\mathcal{S}_p$: Sous-ensemble de $\mathcal{S}$ constitué des éléments de $\mathcal{S}$ périodiques et de période 1.

$\mathcal{E}$: Ensemble des h appartenant à $\mathcal{C}_p$ vérifiant :

$$\forall\, \psi \in \mathcal{S}_p \qquad \int_0^1 h(t, \psi(t))\, dt = 0.$$

On suppose, dans toute la suite du problème, que F *est périodique de période 1 par rapport à la première variable.*

II

Soit φ un élément de $\mathcal{S}$.

1° Montrer que la suite $(\varphi(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ indexée par $\mathbb{Z}$ est monotone (on pourra considérer la fonction χ définie par $\chi(t) = \varphi(1 + t)$).

2° On pose, pour n dans $\mathbb{Z}$,

$$\chi_n(t) = 0\,(0, \varphi(n), t).$$

a. Montrer, en utilisant ces fonctions χ_n, que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \to +\infty} \varphi(n + t) \quad \text{existe.}$$

Désignant par $\psi_+(t)$ cette limite, montrer que ψ_+ appartient à $\mathcal{S}_p$ et que :

$$\lim_{t \to +\infty} (\varphi(t) - \psi_+(t)) = 0.$$

b. Démontrer de même l'existence d'un élément ψ_- de $\mathcal{S}_p$ tel que :

$$\lim_{t \to -\infty} (\varphi(t) - \psi_-(t)) = 0.$$

3° Montrer que, pour tout h de $\mathcal{C}_p$,

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, h(t, \varphi(t))\, dt$$

existe et exprimer sa valeur sous forme d'une intégrale.

On suppose désormais, pour toute la suite du problème, que $\mathcal{S}_p$ est fini.

III

Soit h un élément de $\mathcal{E}$.

1° Soient ψ_1 et ψ_2 deux éléments distincts de $\mathcal{S}_p$, $\psi_1 < \psi_2$, tels qu'il n'existe pas d'élément ψ de $\mathcal{S}_p$, distinct de ψ_1 et de ψ_2, vérifiant $\psi_1 \leqslant \psi \leqslant \psi_2$.
On note $\widehat{\mathcal{S}}$ l'ensemble des éléments φ de $\mathcal{S}$ vérifiant $\psi_1(0) < \varphi(0) < \psi_2(0)$.
Soit δ un élément de $\widehat{\mathcal{S}}$. On suppose que $(\delta(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est croissante.

a. Montrer que :

$$\lim_{t \to -\infty} (\delta(t) - \psi_1(t)) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} (\delta(t) - \psi_2(t)) = 0.$$

b. Montrer que pour tout élément φ de $\widehat{\mathcal{S}}$ il existe un et un seul n de $\mathbb{Z}$ tel que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \quad \delta(n + t) \leqslant \varphi(t) < \delta(n + 1 + t).$$

c. En déduire :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, C > 0, \quad \forall\, \varphi \in \widehat{\mathcal{S}}, \quad \exists\, A \in \mathbb{R},$$
$$\forall\, t \in \mathbb{R} \quad (t \leqslant A - C) \Rightarrow |\varphi(t) - \psi_1(t)| \leqslant \varepsilon$$
$$\text{et} \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \quad (t \geqslant A + C) \Rightarrow |\varphi(t) - \psi_2(t)| \leqslant \varepsilon.$$

d. Montrer que :

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, h(t, \varphi(t))\, dt = 0,$$

la limite étant uniforme par rapport aux φ appartenant à $\widehat{\mathcal{S}}$.

2° Montrer que cette dernière limite est uniforme par rapport à tous les éléments φ de $\mathcal{S}$.

IV

Pour une fonction g de $\mathcal{C}_p$ et pour (s, x) dans $\mathbb{R} \times [0, 1]$ on note $Ag(s, x)$ la dérivée au point s, lorsqu'elle existe, de l'application $r \to g(r, 0(s, x, r))$.

On désigne par D l'ensemble des fonctions g de $\mathcal{C}_p$ pour lesquelles $Ag(s, x)$ est défini pour tout (s, x) de $\mathbb{R} \times [0, 1]$ et la fonction $Ag : (s, x) \to Ag(s, x)$ appartient à $\mathcal{C}_p$.

On pose :

$$\text{Im A} = \{ Ag ; \quad g \in \text{D} \}.$$

1° Soit h appartenant à $\mathcal{C}_p$. On pose, pour $\lambda > 0$ et pour (s, y) dans $\mathbb{R} \times [0, 1]$,

$$h_\lambda(s, y) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, h(s + t, 0(s, y, s + t))\, dt.$$

Montrer que h_λ appartient à D et calculer $A\, h_\lambda$ en fonction de h et de h_λ.

2° Montrer que $\mathcal{E}$ est inclus dans $\overline{\text{Im A}}$, adhérence de Im A dans $\mathcal{C}_p$ muni de la norme uniforme

$$(\|f\| = \sup \{ |f(t, x)| ; \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times [0, 1] \}).$$

3° Montrer que Im A est inclus dans $\mathcal{E}$ et en déduire $\overline{\text{Im A}} = \mathcal{E}$.

4° Montrer :

$$\text{codim}\, (\overline{\text{Im A}}) = \text{card}\, \mathcal{S}_p,$$

où card $\mathcal{S}_p$ désigne le cardinal de $\mathcal{S}_p$ et codim $(\overline{\text{Im A}})$ désigne la dimension de l'espace vectoriel quotient $\mathcal{C}_p / \overline{\text{Im A}}$.